МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

Методические указания
к выполнению контрольной работы по темам
«Элементы линейной алгебры.
Дифференциальное и интегральное исчисление
функций одной переменной»
для обучающихся заочной формы обучения направлений подготовки
естественно-технологического института

Мурманск
2020 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Основной формой работы обучающихся заочно является самостоятельная изучение учебного материала: чтение учебников, решение типовых задач с проверкой правильности решения, выполнение контрольных работ.

В настоящем пособии содержатся список рекомендуемой литературы, методические указания к изучению теоретического материала и рекомендации по выполнению контрольной работы по темам «Элементы линейной алгебры. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной».

В результате изучения этих тем обучающиеся должны:

• ознакомиться с основами линейной алгебры (действия над матрицами, вычисление определителей), научиться решать системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера;

• владеть понятиями функции, сложной и обратной функций, знать свойства основных элементарных функций, уметь определять их основные характеристики по графикам функций;

• владеть основными понятиями дифференциального исчисления (производная и ее геометрический смысл, дифференциал), уметь находить производные функций, заданных явно, неявно или параметрически;

• иметь навыки решения основных задач с использованием производных: геометрические задачи на касательную и нормаль и пр.;

• знать приемы исследования функций с помощью производной;

• изучить основные методы интегрирования;

• получить представление об определенном интеграле и его свойствах, научиться вычислять его по формуле Ньютона–Лейбница;

• научиться исследованию несобственных интегралов первого и второго рода на сходимость и расходимость;

• научиться использовать определенный интеграл для решения геометрических задач, таких как вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения, длины дуги плоской кривой.

Предлагаемое пособие включает варианты контрольной работы для обучающихся заочной формы обучения, а также справочный материал, необходимый для выполнения работы. Кроме того, в пособии содержится решение примерного варианта контрольной работы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из $m \cdot n$ элементов (m строк и n столбцов):

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \text{где } a_{ij} \text{ – элементы матрицы,}$$

$i = 1,2,\dots, m$ – номер строки, $j = 1,2,\dots, n$ – номер столбца.

Для краткости матрицу обозначают одной буквой, например, буквой A.

Некоторые виды матриц:

1) *нулевая матрица*: матрица, все элементы которой равны нулю;

2) при $n = 1$ *матрица-столбец*: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$;

3) при $m = 1$ *матрица-строка*: $Y = (y_1\ \ y_2\ \dots\dots y_n)$;

4) при $m = n$ *квадратная матрица*: $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

У квадратной матрицы различают главную диагональ (соединяющую элементы a_{11} и a_{nn}) и побочную диагональ.

Примеры квадратных матриц:

1) *единичная матрица* (квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

2) квадратная матрица второго порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

3) квадратная матрица третьего порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковые размерности и их соответствующие элементы равны:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n).$$

2. Линейные операции над матрицами

Умножение матрицы A на число k:

$$B = k\cdot A=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix},$$

или, в краткой записи:

$$B = k\cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k\cdot a_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n).$$

Сложение (*вычитание*) матриц A и B одинаковой размерности:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n).$$

Произведение матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$:

$$C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} \Leftrightarrow$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, k).$$

Формулу легко запомнить, как правило умножения «строка на столбец»: произведение матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ есть матрица $C_{m\times k}$, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Замечание. Перемножать можно только *соответственные* матрицы A и B, т.е.число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

Если задан многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение

$$a_0A^n+a_1\cdot A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE,$$

где A – квадратная матрица, $A^n=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{n\ раз}$ и E – единичная матрица той же размерности, что и A. Значением матричного многочлена является матрица.

3. Определители

Определитель второго порядка (определитель квадратной матрицы второго порядка):

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка (определитель квадратной матрицы третьего порядка):

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для краткости определитель обозначают: $|A|$ или Δ.

Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получается из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца (обозначается M_{ij}).

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (обозначается A_{ij}) называется число:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Определитель третьего порядка можно вычислить, используя его разложение по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

или, в краткой записи:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

т.е. определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Аналогично можно записать разложение определителя по любой другой строке или столбцу.

4. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными методом Крамера

Пусть дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

(коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_j для $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ считаются заданными).

Тройка чисел x_1^0, x_2^0, x_3^0 называется *решением системы*, если в результате подстановки этих чисел вместо x_1, x_2, x_3 все три уравнения системы обращаются в тождества.

Систему можно переписать *в матричном виде*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad AX = B,$$

где A – это матрица коэффициентов при неизвестных, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Составим определитель матрицы A и три вспомогательных определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *главным определителем системы*. *Вспомо-*

гательные определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3 получаются из Δ заменой элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

Если определитель $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы и оно выражается формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Формулы называются *формулами Крамера*.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ»

1. Функции и их свойства

Переменной называют величину $x \in X$, принимающую значения из некоторого множества значений X.

Если каждому значению переменной x из множества X поставлено в соответствие по определенному правилу f единственное значение переменной y из множества Y, то говорят, что задана *функция* $y = f(x)$, определенная на множестве X с множеством значений Y. При этом используют следующие названия:

x –– аргумент (независимая переменная);
y – значение функции (зависимая переменная);
X – область определения функции (ООФ);
Y – множество значений функции (ОЗФ).

Функция $y = f(x)$, область определения X которой симметрична относительно начала координат, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Примеры. $y = \cos x$ – четная функция, $y = x^3$ – нечетная функция, $y = \sqrt{x}$ – функция общего вида (ни четная, ни нечетная).

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T, такое, что $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Примеры. $y = \mathrm{tg}x$ – периодическая функция, наименьший период $T = \pi$, $y = \ln x$ – непериодическая функция.

Значение функции $y = f(x)$ – переменная величина, поэтому можно рассматравать новую функцию с аргументом y: $z = g(y)$, где $z \in Z$,
т. е. функцию $z = g(f(x))$. Такая функция называется *сложной* функцией от x, или *суперпозицией* функций f и g.

<u>Пример</u>. $z = \mathrm{tg}(x^2 + 3x - 1)$ – суперпозиция функций $z = \mathrm{tg}y$ и $y = x^2 + 3x - 1$.

Если $\forall y \in Y$ ставится в соответствие единственное значение $x \in X$, такое, что $y = f(x)$, то говорят, что задана функция $x = f^{-1}(y)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными функциями*. Если у обратной функции $x = f^{-1}(y)$ обозначить аргумент буквой x, а функцию – буквой y, то графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно прямой $y = x$.

<u>Пример</u>. $y = \lg x$ и $y = 10^x$ – взаимно обратные функции.

Все функции, задаваемые аналитическим способом, можно разбить на два класса: *элементарные* и *неэлементарные*. В классе элементарных функций выделяют *основные элементарные функции*: степенная ($y = x^n$), показательные ($y = a^x$), тригонометрические ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$), а также обратные к ним (логарифмические, обратные тригонометрические и др.). Элементарными называют функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, а также суперпозиции основных элементарных функций. Все остальные функции относятся к неэлементарным.

<u>Примеры</u>. $y = \lg(\cos x)$ – элементарная функция, т.к. является суперпозицией основных элементарных функций $y = \lg x$ и $y = \cos x$; $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – неэлементарная функция.

Нулями функции $y = f(x)$ называют точки x, в которых выполнено равенство $f(x) = 0$. Нули функции – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox.

<u>Пример</u>. У функции $y = \lg(x)$ единственный нуль – точка $x = 1$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на интервале

$x \in (a;\, b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то есть большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* на интервале $x \in (a;\, b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* функции.

Если функция $y = f(x)$ монотонна на интервале $x \in (a;\, b)$, то она имеет обратную функцию $y = f^{-1}(x)$.

<u>Пример</u>. Функция $y = \mathrm{tg}x$ монотонна на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$, ее ОЗФ: $y \in (-\infty;\, \infty)$. Она имеет обратную функцию $y = \mathrm{arctg}x$, определенную на интервале $x \in (-\infty;\, \infty)$, с ОЗФ: $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая двухсторонняя окрестность точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. При этом число $f(x_0)$ называется *максимумом* функции $f(x)$ и обозначается $y_{\max}$.

Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума*, а число $f(x_0)$ – *минимумом* функции $f(x)$ и обозначается $y_{\min}$.

Точки максимумов и минимумов называются *точками экстремумов* функции, а числа $y_{\max}$ и $y_{\min}$ называются *экстремумами* функции.

<u>Пример</u>. Функция $y = \cos x$ имеет точки максимумов $x = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $y_{\max} = y(2\pi k) = 1$, и точки минимумов $x = \pi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $y_{\min} = y(\pi + 2\pi k) = -1$.

2. Предел функции. Предел последовательности

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, где a – конечная или бесконечно удаленная точка на числовой прямой Ox.

Число A называется *конечным пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$

(или при $x \to a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым бы оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определение конечного предела при $x \to a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) \ / \ |f(x) - A| < \varepsilon \ \ \forall x \in U(a), \ x \neq a. \qquad (*)$$

Геометрически существование конечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в случае, когда $a \in (-\infty; \infty)$, означает, что значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A, если значения аргумента становятся достаточно близкими к точке $x = a$ (рис. 1). При этом в самой точке a функция может быть не определена или определена, но может иметь значение, отличное от A.

Поведение функции только слева или только справа от точки $x = a$, т.е. в ее левой или правой окрестности, характеризуется ее *односторонними пределами* (рис. 2): *левосторонний предел* функции обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, где условие $x \to a - 0$ означет, что x остается левее точки a ($x \to a, \ \ x < a$); *правосторонний предел* функции обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B$, где условие $x \to a + 0$ означет, что x остается правее точки a ($x \to a, \ \ x > a$).

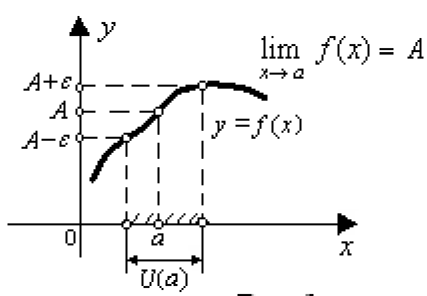

Рис. 1.

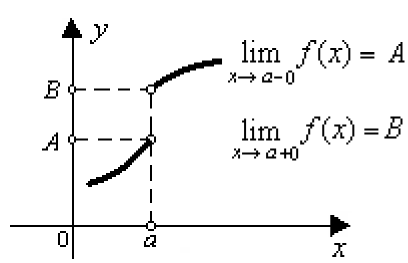

Рис. 2.

Существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что существуют оба односторонних предела и они совпадают между собой:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A.$$

Если существует конечный предел функции при $x\to\infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, то в его определении (*) $U(a)$ – это окрестность бесконечно удаленной точки числовой прямой (рис. 3). При этом можно рассматривать односторонние пределы: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (рис. 4).

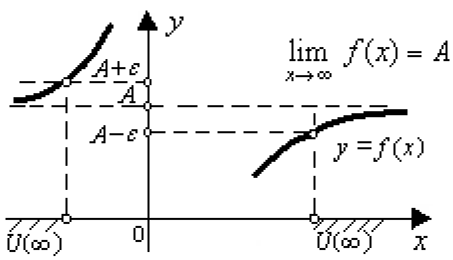

Рис. 3.

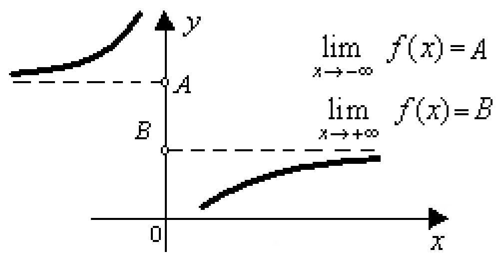

Рис. 4.

Числовую последовательность $\{u_n\}$ обычно рассматривают как функцию натурального аргумента *n*: $u_n = f(n),\ \forall n \in N$.

Если существует предел последовательности $\lim_{n\to\infty} u_n = A$, то его определение можно записать символически:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ /\ |u_n - A| < \varepsilon\ \ \forall n > n_0,$$

т.е. члены последовательности $\{u_n\}$ сколь угодно мало отличаются от числа *A* при достаточно больших номерах *n* (для $n > n_0$).

3. Бесконечно малые, бесконечно большие и локально ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ (рис. 5, 6).

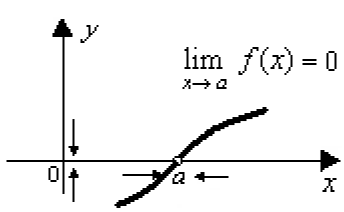

Рис. 5.

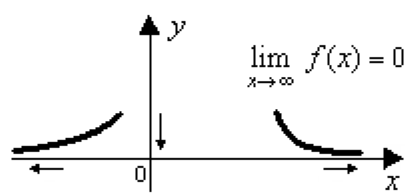

Рис. 6.

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Основные соотношения эквивалентностей:

$$\sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\arcsin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $B > 0$, сколь бы большим оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(x)| > B$.

Предел бесконечно большой функции при $x \to a$ обозначается символом ∞: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и называется *бесконечным пределом* функции при $x \to a$.

Определение бесконечно большой функции при $x \to a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall B > 0 \ \exists U(a) \ / \ |f(x)| > B \ \ \forall x \in U(a),\ x \neq a.$$

Бесконечный предел последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$ означает, что члены последовательности $\{u_n\}$ становятся сколь угодно большими по модулю при достаточно больших номерах n:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall B > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ / \ |u_n| > B \ \ \forall n > n_0.$$

Функция $y = f(x)$ называется *локально ограниченной в точке* $x = a$, если существует такая окрестность точки $U(a)$, в которой значения функции удовлетворяют неравенству $m \le f(x) \le M$, где m и M – некоторые числа.

Любая функция, имеющая конечный предел при $x \to a$, в том числе и бесконечно малая функция, является локально ограниченной в точке $x = a$.

Если $y = f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то она не является локально ограниченной в точке $x = a$.

Пример. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ – локально ограниченная функция во всех точках, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$.

4. Вычисление пределов

При вычислении пределов используют теоремы о конечных пределах и теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.

Основные теоремы о конечных пределах.

1. Если $f(x) = const$ ($const$ – константа) при $\forall x \in U(a)$, то $\lim\limits_{x \to a} const = const$.
2. $\lim\limits_{x \to a} \left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$, где С = $const$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, если $f(x)$ – функция, непрерывная в точке $x = a$ (см. п. 6).
4. Если $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$, где A_1, A_2 – числа, то $\lim\limits_{x \to a} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = A_1 \pm A_2$, $\lim\limits_{x \to a} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = A_1 \cdot A_2$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}$

при условии, что $A_2 \neq 0$.

Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях (для краткости обозначим: *бм* – бесконечно малая функция, *бб* – бесконечно большая функция, *огр* – локально ограниченная функция).

5. *бм* ± *бм* = *бм*.
6. *бм* · *бм* = *бм*.
7. *бм* · *огр* = *бм*.
8. $\dfrac{огр}{бм} = бб$, если *огр* не является *бм*.
9. *бб* + *бб* = *бб*, если обе *бб* одного знака.

10. $бб \cdot бб = бб$.

11. $бб \cdot огр = бб$, если $огр$ не является $бм$.

12. $\dfrac{огр}{бб} = бм$.

<u>Примеры</u>.

1) $\lim\limits_{x \to a} 10 = 10$ (здесь использована теорема 1);

2) $\lim\limits_{x \to 2}\big(10(2x-1)\big) = 10\lim\limits_{x \to 2}(2x-1) = 10(2 \cdot 2 - 1) = 30$ (здесь использованы теоремы 2, 3 и непрерывность функции $y = 2x - 1$);

3) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\overset{\to -3}{x^2-4}}{\underset{\to 0}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{огр}{бм}\right) = \lim\limits_{x \to 1} бб = \infty$ (здесь использована теорема 8);

4) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{4x}{x^2} - \dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} 1 + 4\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x} - 5\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x^2} =$

$= 1 + 4\lim\limits_{x \to \infty} бм - 5\lim\limits_{x \to \infty} бм = 1 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1$ (здесь использованы теоремы 2, 4 и 12).

5. Раскрытие неопределенностей

Если некоторый предел существует, но не может быть вычислен при помощи теорем о конечных пределах или теорем о бесконечно малых, бесконечно больших и локально ограниченных функциях, то говорят, что этот предел *имеет неопределенность* и указывают ее вид. Основные виды неопределенностей: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$.

Чтобы вычислить предел, имеющий неопределенность, нужно предварительно преобразовать функцию, стоящую под знаком предела, таким образом, чтобы неопределенность исчезла, т.е. *раскрыть неопределенность*. Для этой цели рекомендуется использовать определенные правила.

<u>Правило 1</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to \infty$, образованную отношением двух многочленов или иррациональных функций, нужно в числителе и знаменателе вынести за скобки старшие степени x и сократить дробь на степень x.

<u>Правило 2</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to a$, где a – число, образованную отношением двух функций, нужно в числителе и знаменателе дроби выделить *критический множитель* $(x - a)$, и сократить дробь на него.

Для выделения критического множителя в случае, когда неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ образована отношением тригонометрических, показательных, или логарифмических функций, используют *принцип замены бесконечно малых функций*: при вычислении предела можно заменить любой бесконечно малый сомножитель на ему эквивалентный. При этом можно использовать теоретические соотношения эквивалентностей.

<u>Правило 3</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$, нужно свести ее ко второму замечательному пределу, который может быть записан в двух формах:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e \quad \text{или} \quad \lim_{z\to 0}\left(1+z\right)^{\frac{1}{z}}=e;$$

здесь e – это иррациональное число, которое можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби: $e = 2{,}7182818\ldots$ ($e \approx 2{,}72$).

6. Непрерывность функции, точки разрыва

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) $x_0 \in$ ООФ вместе с некоторой своей окрестностью;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$;

3) этот предел совпадает со значением функции в точке x_0

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Если функция не является непрерывной в точке x_0, но она определена в окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0), то x_0 называется *точкой разрыва* функции.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Дифференцирование функций

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ где } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Другие обозначения производной: y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Если существует производная функции $y = f(x)$ в точке x, то функция называется *дифференцируемой* в этой точке. *Дифференцирование* функции – это процесс нахождения производной y'_x. При дифференцировании используют таблицу производных и правила дифференцирования.

Таблица производных основных элементарных функций.

1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$		
2	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$	10	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
3	$(e^x)' = e^x$	11	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
4	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	12	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
5	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	13	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
6	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

7	$(\cos x)' = -\sin x$	15	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	16	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
9	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	17	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

<u>Основные правила дифференцирования.</u>

1. Производная от постоянной равна нулю: $(c)' = 0$.
2. Производная алгебраической суммы $(u \pm v)$ двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и равна алгебраической сумме производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. Производная произведения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
4. Производная отношения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.
5. Постоянную можно вынести за знак производной: $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$
6.Производная от сложной функции: если $y = f(z(x))$, где $f(z)$ и $z(x)$ – дифференцируемые функции, то $y'_x = f'_z \cdot z'_x$ («правило цепочки»).

Производная от функции, заданной неявно: если функция $y(x)$ задана уравнением $F(x,y) = 0$, то для нахождения y'_x нужно продифференцировать обе части тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства найти y'_x как решение линейного уравнения.

1) Производная от функций $y(x)$, заданной параметрически: если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

где $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, то: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Производные высших порядков: производная 2-го порядка: $y''_x = (y'_x)'_x$, 3-го порядка: $y'''_x = (y''_x)'_x$ и т.д. Для обозначений производных высшего порядка используются также символы вида: $f'''(x)$, f'''_{xx}, $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$. Производные 4 и более высоких порядков обозначаются при помощи римских цифр: y^{IV}, y^{V}.... Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$, она получается n-кратным дифференцированием функции $y = f(x)$: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

2. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой

Касательной к кривой l в ее точке M называют предельное положение секущей MN, когда точка N, двигаясь по кривой l, неограниченно приближается к точке M (рис. 25).

Рис. 25.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой и проходящая через точку касания (рис. 26).

Геометрический смысл производной: $y'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$: $k_{кас.} = y'(x_0)$. Тогда из условия перпендикулярности прямых можно найти угловой коэффициент нормали:

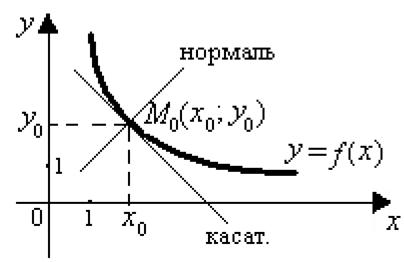

Рис. 26.

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Если $y'(x_0)$ существует, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0), \quad \text{где} \quad y_0 = f(x_0).$$

Если $y'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали: $\quad y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

3. Вычисление пределов при помощи правила Лопиталя

Правило Лопиталя: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если предел отношения производных существует (конечный или бесконечный): $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда $x\to\infty$. Его можно применять неоднократно.

4.Исследование функций и построение графиков

Полное исследование функции $y=f(x)$ для построения ее графика включает следующие пункты (не обязательно именно в этом порядке).

<u>1)Область определения функции (ООФ) и область ее значений (ОЗФ).</u>

Если область определения функции $y=f(x)$ не задана специально, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений ее аргумента, т.е. с множеством всех точек *x*, для которых выполнима операция *f*. При нахождении ООФ используют ООФ элементарных функций $y=\ln(x)\quad (x>0)$, $y=\dfrac{1}{x}\quad (x\neq 0)$, $y=\sqrt[2n]{x}\quad (x\geq 0)$, и др.

Область значений функции находят только в случаях, когда ее можно сразу указать, опираясь на свойства элементарных функций, например, для функции $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$, очевидно, $y\geq 0$.

<u>2)Четность функции, ее периодичность</u>.

Для установления четности (нечетности) функции $y=f(x)$, имеющей симметричную область определения, проверяют справедливость равенств $f(-x)=f(x)\quad (f(-x)=-f(x))$ для всех $x\in$ ООФ.

В случае четности или нечетности функции исследование ее поведения и построение графика можно проводить только для $x\geq 0$, а затем достроить график, используя симметрию: для четной функции график симметричен относительно оси *OY*, а для нечетной – относительно начала координат.

Для установления периодичности функции проверяют справедливость равенства $f(x+T)=f(x)$ для $\forall x\in$ ООФ, где *T* определяется видом функции. В случае периодической функции исследование проводят для одного промежутка периодичности.

3)Непрерывность функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.

Для определения промежутков непрерывности функции используют непрерывность основных элементарных функций. В точках, «подозрительных» на разрыв (отдельных точек, не входящих в ООФ), проверяют выполнение условий непрерывности. Если функция терпит разрыв в точке x_0, то определют тип разрыва.

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в некоторой точке x_0, то прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции. Если только один из односторонних пределов при $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$ является бесконечным, то асимптота называется *односторонней.*

Если функция определена не на всей числовой оси, то необходимо вычислить односторонние пределы функции в точках, ограничивающих промежутки ООФ. Если односторонний предел функции в точке a, ограничивающей промежуток ООФ, бесконечен, то $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой графика функции. Например, если ООФ: $x \in (a; +\infty)$, то нужно найти $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$; если этот предел окажется бесконечным, то $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой графика функции.

4)Промежутки монотонности и экстремумы.

Для определения промежутков монотонности функции $y = f(x)$ используют *достаточный признак монотонности*.

Достаточный признак монотонности дифференцируемой функции: если на интервале $x \in (a, b)$ производная $f'(x)$ сохраняет знак, то функция $y = f(x)$ сохраняет монотонность на этом интервале, а именно: если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

Для установления точек экстремумов функции $y = f(x)$ используют *необходимый и достаточные признаки существования экстремума*.

Необходимое условие существования экстремума функции: если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие ООФ, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции по ее первой* *производной* (точками, «подозрительными на экстремум»).

Первый достаточный признак существования экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 (слева направо) производная $f'(x)$ изменяет свой знак, то в точке x_0 есть экстремум причем это максимум, если знак $f'(x)$ меняется с плюса на минус, и это минимум, если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не изменяет свой знак, то в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$.

Второй достаточный признак существования экстремума: если $y = f(x)$ – дважды дифференцируемая функция в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, тогда: если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Для нахождения точек экстремумов функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по первой производной. После этого проверяют выполнение в них достаточных условий существования экстремума функции.

5)Промежутки выпуклости, вогнутости графика и точки перегиба.

Дуга кривой L называется *выпуклой*, если все ее точки расположены не выше касательной, проведенной в любой точке этой дуги (рис. 27), и называется *вогнутой*, если все ее точки расположены не ниже касательной, проведенной в любой точке дуги кривой.

Точки, принадлежащие кривой, и отделяющие участки выпуклости от участков вогнутости, называются *точками перегиба* кривой (рис. 27).

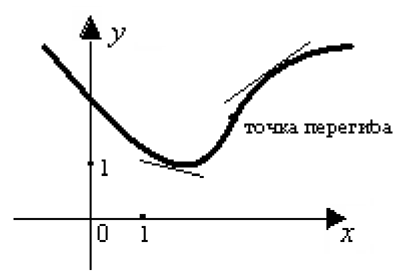

Рис. 27.

Достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции: если функция $y = f(x)$ является дважды дифференцируемой и ее вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак при всех $x \in (a;b)$, то график функции имеет постоянное направление выпуклости на этом интервале: при $f''(x)<0$ – выпуклость вверх, при $f''(x)>0$ – вогнутость (выпуклость вниз).

Необходимое условие для точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то ее вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками функции по ее второй производной* (точками, «подозрительными на перегиб»).

Достаточное условие для точек перегиба: если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, подозрительную на перегиб, изменяет знак, то точка графика с абсциссой x_0 является точкой перегиба. Если $f''(x)$ не изменяет знак при переходе через точку x_0, то перегиба нет.

При нахождении промежутков выпуклости, вогнутости графика функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по второй производной, после этого выделяют промежутки знакопостоянства второй производной на ООФ: если $f''(x) > 0$, то кривая вогнутая, а если $f''(x) < 0$, то кривая выпуклая. Точки перегиба определяют, используя достаточные условия перегиба.

6)Наклонные и горизонтальные асимптоты.

Асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, расстояние до которой от текущей точки M кривой стремится к нулю при удалении точки M от начала координат (рис. 28).

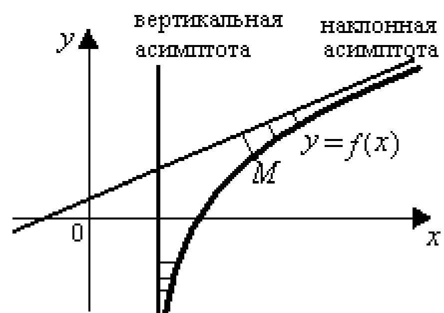

Рис. 28.

Если график функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* с уравнением $y = kx + b$, то параметры k и b в уравнении асимптоты можно найти по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big).$$

Если хотя бы один из этих пределов является бесконечным или не существует, то наклонных асимптот нет. В случае, когда $k = 0$, график имеет *горизонтальную асимптоту* с уравнением $y = b$.

В некоторых случаях (как правило, если $f(x)$ выражена через показательную или логарифмическую функцию), график может иметь асимптоты только при $x \to -\infty$ или только при $x \to +\infty$.

Иногда ветви графика $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ имеют разные асимптоты.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для всех x из этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции, то есть неопределенный интеграл – это выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$.

Процедуру нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием*. При интегрировании используют: таблицу интегралов, свойства интегралов и специальные методы интегрирования, основные из которых – замена переменной и интегрирование по частям.

Таблица.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$;	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;	11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$;
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right\rvert + C$;
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;	15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;
7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$;	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$;	

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	

2. **Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной под знаком неопределенного интеграла**

При интегрировании функций наиболее часто используются следующие его свойства:

1) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int (f_1(x) + f_2(x))dx$;

2) $\int \left(k \cdot f(x)\right)dx = k \cdot \int f(x)dx$;

3) $\int dz = z + C$.

Пример 1. Найти $\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами 1-3, а также таблицей интегралов:

$$\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx = \int \cos x\, dx + 3\int \operatorname{ctg} x\, dx - 5\int dx = \sin x + 3\ln|\sin x| - 5x + C.$$

Ответ: $\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx = \sin x + 3\ln|\sin x| - 5x + C$.

Одним из основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (метод подстановки), который в некоторых случаях позволяет свести заданный интеграл к табличному интегралу.

Замена переменной под знаком неопределенного интеграла осуществляется по формулам:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt \quad \text{или} \quad \int f(z(x))\,z'(x)dx=\int f(z)dz\,.$$

<u>Пример 2</u>. Найти $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$.

Решение.

$$\int \cos x\ e^{\sin x}\ dx=\left|\begin{matrix}\text{замена}\\ \sin x=z;\ \cos x dx=dz\end{matrix}\right|=\int e^z dz=e^z+C=\left|\begin{matrix}\text{обратная замена}\\ z=\sin x\end{matrix}\right|=e^{\sin x}+C.$$

Ответ: $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx=e^{\sin x}+C$.

Этот интеграл можно взять, используя подведение под знак дифференциала части подинтегральной функции (не прописывая замену переменной)

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx=\int e^{\sin x}\,(\sin x)'dx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C\,.$$

Наиболее часто прием подведения под знак дифференциала используется при линейной замене переменной интегрирования:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b), \quad \text{так как} \quad dx=\frac{1}{a}d(ax+b)\,.$$

<u>Пример 3</u>. Найти $\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}}$.

Решение. $dx=\frac{1}{3}d(3x-5) \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}}=\int \frac{\frac{1}{3}d(3x-5)}{(3x-5)^{2/3}}$.

Теперь воспользуемся свойством 2, а также таблицей интегралов:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}}=\frac{1}{3}\int (3x-5)^{-2/3}d(3x-5)=\frac{1}{3}\frac{(3x-5)^{-2/3+1}}{-2/3+1}+C=\frac{1}{3}\frac{(3x-5)^{1/3}}{1/3}+C=(3x-5)^{1/3}+C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}}=(3x-5)^{1/3}+C$.

3. Интегрирование по частям

Формулой *интегрирования по частям* называют следующую формулу:

$$\int u dv=uv-\int v du\,.$$

Обычно за dv принимают такое выражение, интегрирование которого не вызывало бы трудностей, а за u – функцию, дифференцирование которой приводит к ее упрощению.

Можно выделить два основных класса интегралов, берущихся по частям:

1) $\int P_n(x)\sin bx\,dx$; $\int P_n(x)\cos bx\,dx$; $\int P_n(x)\,e^{bx}dx$; $\int P_n(x)\,a^{bx}\,dx$

– здесь за u принимают целый многочлен $P_n(x)$, за dv – оставшееся выражение, то есть, например $\sin bx\,dx$.

2) $\int P_n(x)\arcsin bx\,dx$; $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,bx\,dx$; $\int P_n(x)\ln bx\,dx$

– здесь за u принимают обратную функцию, например, $\arcsin bx$, за dv – оставшееся выражение, то есть $P_n(x)dx$.

4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называют отношение двух целых многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Для интегрирования рациональной дроби необходимо предварительно разложить ее, т.е. представить $R(x)$ в виде суммы простейших дробей видов:

$$\frac{A}{x-\alpha},\quad \frac{B}{(x-\alpha)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r},$$

где k, r – целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Если дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильная ($k \ge r$), то необходимо предварительно выделить целую часть дроби.

5. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Для нахождения интегралов видов $\int \sin^2 x\,dx$ и $\int \cos^2 x\,dx$ используют тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Для нахождения интегралов вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где R – рациональная функция (не содержащая sin$x$ и cos$x$ под знаком корней), используют универсальную подстановку: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, которая сводит $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ к интегралу от рациональной функции, т.к.

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \;\Rightarrow\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Формула Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ если } F'(x) = f(x) \text{ и } f(x) \text{ непрерывна на } [a,b].$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} (12x+3)\cos(13x)dx$.

Решение. Это определенный интеграл, берущийся по частям, получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (12x+3)\cos(13x)dx = \left| \begin{array}{l} u = 12x+3; \qquad du = 12dx; \\ dv = \cos 13dx; \; v = \int dv = \int \cos 13x dx = \frac{1}{13}\int \cos(13x)d(13x) = \frac{1}{13}\sin 13x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{13}(12x+3)\sin 13x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(13x)12dx = \left(\frac{1}{13}(12x+3)\sin 13x + \frac{12}{13\cdot 13}\cos 13x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{6\pi+3}{13} - \frac{12}{169} = \frac{78\pi+27}{169} \approx 1{,}6.$$

Ответ: $\int_0^{\pi/2} (12x+3)\cos(13x)dx = \frac{78\pi+27}{169} \approx 1{,}6$.

7. Несобственные интегралы первого и второго рода

Примером *несобственного интеграла первого рода* является интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Интегралы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

где a – точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

где b – точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, относятся к *несобственным интегралам второго рода*.

Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует конечный предел в правой части равенства. Если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется *расходящимся*.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Это несобственный интеграл первого рода, поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ сходится и равен $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}8$.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}$.

Решение. Это несобственный интеграл второго рода, так как $x = 1$ – точка разрыва второго рода подинтегральной функции, поэтому

$$\int\limits_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{(x-1)^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\Bigg| = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Ответ: интеграл $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}$ расходится.

8. Вычисление площади плоской фигуры в декартовой системе координат

Криволинейной трапецией в ДСК называется фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для $x \in [a; b]$

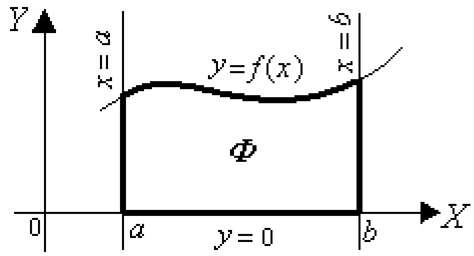

Рис. 1.

Формула для вычисления площади криволинейной трапеции: $S_ф = \int_a^b f(x)dx$.

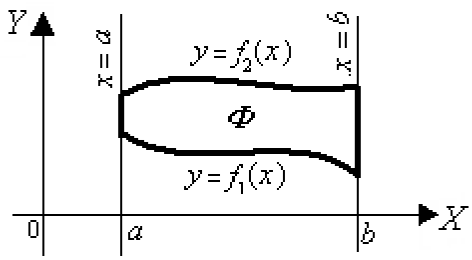

Рис. 2.

Если фигура $Ф$ ограничена в ДСК линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a; b]$ (рис. 2), то площадь $Ф$ можно вычислить по формуле:

$$S_ф = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

9. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат (ПСК)

Криволинейным сектором в ПСК называется фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис. 3).

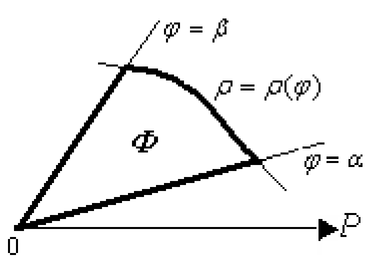

Рис. 3.

Формула для вычисления площади криволинейного сектора: $S_ф = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

10. Вычисление объема тела вращения

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x= b$, $y = 0$ и непрерывной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси OX. Объем полученного при этом тела вращения (рис. 4) вычисляется по формуле: $V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Если плоская фигура ограничена линиями $x = a$, $x= b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a; b]$, то объем полученного при ее вращении вокруг OX тела (рис. 5) можно вычислить по формуле:

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi\int\limits_a^b f_2{}^2(x)dx - \pi\int\limits_a^b f_1{}^2(x)dx = \pi\int\limits_a^b (f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx.$$

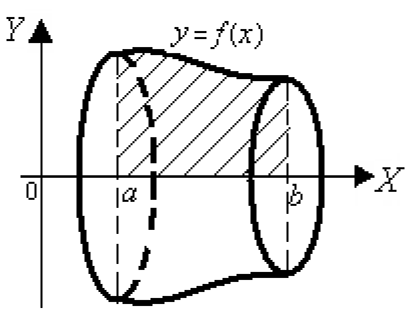

Рис. 4.

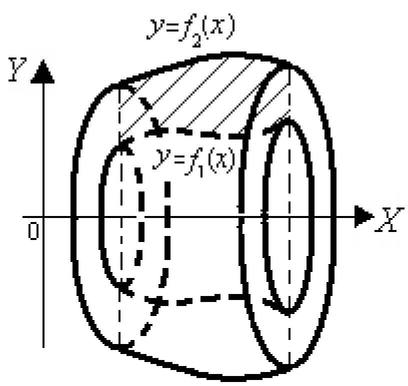

Рис. 5.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

<u>Задача 1.</u> Даны многочлен $f(x)$ и матрица A:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

<u>Задача 2.</u> Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Требуется: найти решение системы с помощью формул Крамера.

<u>Задача 3.</u> Найти производную y'_x:

$$\text{а)} \quad y = \frac{x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg} x}{1 + \sin 4x}; \qquad \text{б)} \quad \begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1 - 4t^2} + 1. \end{cases}$$

<u>Задача 4.</u> Дана функция $y = 3x + \ln\cos x + 2$ и значение $x_0 = 0$. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0.

<u>Задача 5.</u> Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y = x^2 \cdot e^{1-x}.$$

<u>Задача 6.</u> Найти неопределенные интегралы:

$$a) \int \frac{15x^{18}}{x^{19} + 6} dx, \quad б) \int (13x + 1)\ln(14x) dx, \quad в) \int \frac{x + 11}{x^3 + 12x} dx$$

Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

<u>Задача 7.</u> Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$a) \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 169}$$

<u>Задача 8.</u> Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры:

а) ограниченной в ДСК линиями l_1: $y = x^2 + 1$ и l_2: $y = 2x + 4$;

б) ограниченной в ПСК линией l: $\rho = 12 + \cos\varphi$.

Сделать чертежи.

<u>Решение задачи 1</u>.

Записываем матричный многочлен: $f(A) = 3A^2 - 5A + 2E.$ Здесь E – единичная матрица той же размерности, что и A, т.е. 3-го порядка.

Найдем матрицу A^2. При умножении матрицы A на себя используем правило «строка на столбец» (формула (3)):

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot(-1)+0\cdot4 \\ 0\cdot1+2\cdot0+(-1)(-2) & 0\cdot2+2\cdot2+(-1)\cdot1 & 0\cdot0+2\cdot(-1)+(-1)\cdot4 \\ -2\cdot1+1\cdot0+4\cdot(-2) & (-2)\cdot2+1\cdot2+4\cdot1 & -2\cdot0+1\cdot(-1)+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2E$, используя правило умножения матрицы на число:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем значение матричного многочлена $f(A)$, используя правило умножения матрицы на число и правило сложения матриц:

$$f(A) = 3A^2 - 5A + 2E = 3\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \\ -10 & 5 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5+2 & 18-10+0 & -6-0+0 \\ 6-0+0 & 9-10+2 & -18+5+0 \\ -30+10+0 & 6-5+0 & 45-20+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$

<u>Решение задачи 2</u>.

Решим систему с помощью формул Крамера. Для этого составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных в левых частях уравнений и три вспомогательных определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&2\\2&-3&0\\1&5&1\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}8&4&2\\7&-3&0\\0&5&1\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3&8&2\\2&7&0\\1&0&1\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3&4&8\\2&-3&7\\1&5&0\end{vmatrix}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&2\\2&-3&0\\1&5&1\end{vmatrix}=3\cdot(-3)\cdot1+4\cdot0\cdot1+2\cdot2\cdot5-2\cdot(-3)\cdot1-3\cdot0\cdot5-4\cdot2\cdot1=-9+20+6-8=9.$$

Так как $\Delta\neq0$, то данная система имеет единственное решение.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&4&2\\7&-3&0\\0&5&1\end{vmatrix}=8\cdot(-3)\cdot1+4\cdot0\cdot0+2\cdot7\cdot5-2(-3)\cdot0-8\cdot0\cdot5-4\cdot7\cdot1=-24+70-28=18;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&8&2\\2&7&0\\1&0&1\end{vmatrix}=3\cdot7\cdot1+8\cdot0\cdot1+2\cdot2\cdot0-2\cdot7\cdot1-3\cdot0\cdot0-8\cdot2\cdot1=21-14-16=-9;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&4&8\\2&-3&7\\1&5&0\end{vmatrix}=3(-3)\cdot0+4\cdot7\cdot1+8\cdot2\cdot5-8(-3)\cdot1-3\cdot7\cdot5-4\cdot2\cdot0=28+80+24-105=27.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{18}{9}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-9}{9}=-1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{27}{9}=3.$$

Ответ: решение системы, полученное с помощью формул Крамера:

$$x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=3.$$

<u>Решение задачи 3а</u>.

Функция $y(x)$ задана в явном виде и является отношением двух функций: $y=\dfrac{x\cdot e^{-2x}+3\mathrm{tg}x}{1+\sin4x}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$y'_x=\frac{(x\cdot e^{-2x}+3\mathrm{tg}x)'\cdot(1+\sin4x)-(x\cdot e^{-2x}+3\mathrm{tg}x)\cdot(1+\sin4x)'}{(1+\sin4x)^2}.$$

Найдем производные ее числителя и знаменателя:

$$(x\cdot e^{-2x}+3\mathrm{tg}x)'=x'\cdot e^{-2x}+x\cdot\left(e^{-2x}\right)'+3\cdot(\mathrm{tg}x)'=1\cdot e^{-2x}+x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)+3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=(1-2x)\cdot e^{-2x}+\frac{3}{\cos^2 x}$$

$$(1+\sin 4x)'=1'+(\sin 4x)'=0+\cos 4x\cdot 4=4\cos 4x$$

Теперь получаем: $y'_x=\dfrac{\left((1-2x)\cdot e^{-2x}+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot(1+\sin 4x)-(x\cdot e^{-2x}+3\mathrm{tg}x)\cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$.

Преобразование результата не производим, поскольку оно не дает существенного упрощения выражения для y'_x.

Решение задачи 3б.

Функция $y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x=\arcsin 2t-3, \\ y=\sqrt{1-4t^2}+1. \end{cases}$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(\sqrt{1-4t^2}+1\right)'_t}{\left(\arcsin 2t-3\right)'_t}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1-4t^2}}\cdot(-8t)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2}=\frac{-4t\cdot\sqrt{1-4t^2}}{2\sqrt{1-4t^2}}=-2t \quad\Rightarrow\quad y'_x=-2t$$

Производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически, поэтому записываем результат в параметрической форме: $\begin{cases} x=\arcsin 2t-3, \\ y'_x=-2t. \end{cases}$

Ответы:

а) $y'_x=\dfrac{\left((1-2x)\cdot e^{-2x}+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot(1+\sin 4x)-(x\cdot e^{-2x}+3tgx)\cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$;

б) $\begin{cases} x=\arcsin 2t-3, \\ y'_x=-2t. \end{cases}$

Решение задачи 4.

Найдем ординату точки касания: $y_0=f(x_0)=0+\ln\cos 0+2=\ln 1+2=2$.

Для вычисления угловых коэффициентов касательной и нормали найдем производную y'_x:

$$y = 3x + \ln\cos x + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = 3 + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + 0 = 3 + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = 3 - \mathrm{tg}x .$$

Вычислим угловой коэффициент касательной: $k_{кас.} = y'(x_0) = 3 - \mathrm{tg}0 = 3.$

Тогда угловой коэффициент нормали: $k_{норм.} = -\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{3}.$

Запишем уравнение касательной в точке $M(0;\,2)$ и приведем его к виду общего уравнения прямой:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 3(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y + 2 = 0 .$$

Запишем уравнение нормали и аналогично упростим его:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0.$$

,

На рис. 29 построены участок графика функции $y = 3x + \ln\cos x + 2$, касательная $3x - y + 2 = 0$ и нормаль $x + 3y - 6 = 0$ в окрестности точки $M(0;\,2)$. Ответы: $3x - y + 2 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$.

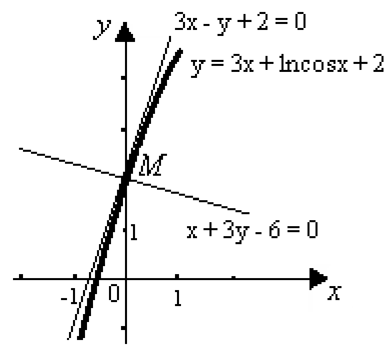

Рис. 29.

Решение задачи 5.

Проведем полное исследование функции $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.

1) ООФ: $x \in (-\infty;\, +\infty)$, ОЗФ: $y \in [0;\, +\infty)$, т.к. $e^{1-x} > 0,\ x^2 \geq 0$.

2) Функция не является четной или нечетной, т.к. $f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, эта функция общего вида. Функция непериодическая.

3) Функция непрерывна на всей ООФ. Точек разрыва нет.

4) Промежутки монотонности и экстремумы найдем при помощи 1-й производной:

$$y' = \left(x^2 \cdot e^{1-x}\right)' = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x}(-1) = (2x - x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 1-й производной: $y' = 0 \;\; \Rightarrow x = 0,\; x = 2;\;\; y'_x$ не существует – таких точек нет.

Проверим выполнение достаточных условий монотонности и экстремума по знаку 1-й производной. На рис. 33 видно, что функция возрастает на интервале $x \in (0;\, 2)$, убывает на интервалах $x \in (-\infty;\, 0)$ и $x \in (2;\, +\infty)$.

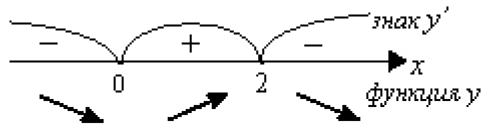

Рис. 33.

В точке $x = 0$ минимум функции, $y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot e^1 = 0$, в точке $x = 2$ максимум, $y_{\max} = y(2) = 2^2 \cdot e^{1-2} = \dfrac{4}{e} \approx 1{,}5$.

5) Выпуклость, вогнутость графика и точки перегиба исследуем при помощи 2-й производной:

$$y'' = \left((2x - x^2) \cdot e^{1-x}\right)' = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} + (2x - x^2) \cdot e^{1-x}(-1) = (2 - 2x - 2x + x^2) \cdot e^{1-x} \Rightarrow$$

$$y'' = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 2-й производной: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, т.е. $x_1 \approx 0{,}6$, $x_2 \approx 3{,}4$.

Проверим выполнение достаточных условий выпуклости, вогнутости графика функции по знаку 2-й производной. На рис. 34 видно, что график функции выпуклый на интервале $x \in (2 - \sqrt{2};\, 2 + \sqrt{2})$, и вогнутый на интервалах $x \in \left(-\infty;\, 2 - \sqrt{2}\right)$ и $x \in (2 + \sqrt{2};\, +\infty)$.

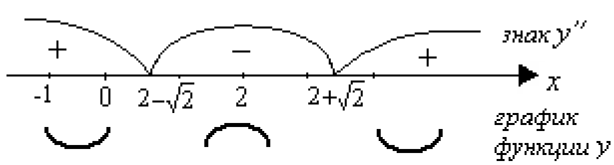

Рис. 34.

В точках с абсциссами $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ имеются перегибы графика; вычисляем ординаты точек перегиба: $y_1 = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-1-\sqrt{2}} \approx 1{,}0$, $y_2 = (2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \approx 0{,}5$.

6) Найдем наклонные асимптоты графика $y = kx + b$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (отдельно).

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{1-x})=(бб\cdot бб)=-\infty$$

(здесь при $x\to-\infty$ обе функции под знаком предела являются бесконечно большими). Следовательно, при $x\to-\infty$ наклонных асимптот нет.

При $x\to+\infty$ получаем:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=(бб\cdot бм)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=\left(\frac{огр}{бб}\right)=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot e^{1-x}-0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x-1}}=$$

$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x-1}}=\left(\frac{огр}{бб}\right)=0$. Следовательно, при $x\to+\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту, ее уравнение: $y = 0$.

7) Точка пересечения с осями координат – единственная: (0; 0), т.к.

$$y=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$

8) Построение графика начинаем с построения асимптоты $y = 0$ (она совпадает с осью абсцисс), затем отмечаем точки графика, в которых функция имеет экстремумы: точку минимума (0; 0), максимума $\left(2;\frac{4}{e}\right)$, и точки перегиба ($x_1$; y_1) и (x_2; y_2), где $x_1\approx3{,}4,\ y_1\approx1{,}0,\ \ x_2\approx0{,}6,\ y_2\approx0{,}5$. После этого выполняем построение графика функции $y=x^2\cdot e^{1-x}$ сначала на промежутках $x\in\left(-\infty;\,2-\sqrt{2}\right)$ и $x\in(2+\sqrt{2};\,+\infty)$, затем на промежутке $x\in(2-\sqrt{2};\,2+\sqrt{2})$.

На графике (рис. 35) видно сближение кривой с асимптотой $y = 0$ при $x\to+\infty$ и перегибы кривой.

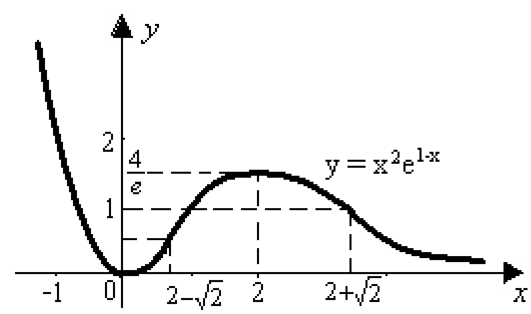

Рис. 35.

Ответ: график на рис. 35.

<u>Решение задачи 6</u>.

а) Так как $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, то получим:

$$\int \frac{15x^{18}}{x^{19}+6}dx = \frac{15}{19}\int \frac{19x^{18}}{x^{19}+6}dx = \frac{15}{19}\int \frac{(x^{19}+6)'dx}{x^{19}+6} = \frac{15}{19}\int \frac{d(x^{19}+6)}{x^{19}+6} = \frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right| + C\ .$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right|\right)' = \frac{15}{19}\frac{1}{x^{19}+6}\cdot(19\,x^{18}) = \frac{15x^{18}}{x^{19}+6},$$

Ответ: $\int \frac{15x^{18}}{x^{19}+6}dx = \frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right| + C$.

б) Интеграл $\int (13x+1)\ln(14x)dx$ относится к типу интегралов, берущихся по частям; это интеграл так называемого второго типа.

$$\int (13x+1)\ln(14x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(14x);\ du = \frac{1}{14x}\cdot 14dx = \frac{dx}{x}; \\ dv = (13x+1)dx;\ v = \frac{13}{2}x^2 + x \end{array} \right| = \left(\frac{13}{2}x^2 + x\right)\ln(14x) - \int\left(\frac{13}{2}x^2 + x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= (6{,}5x^2 + x)\ln(14x) - \int (6{,}5x+1)dx = (6{,}5x^2 + x)\ln(14x) - 3{,}25x^2 - x + C\ .$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left((6{,}5x^2 + x)\ln(14x) - 3{,}25x^2 - x\right)' = (13x+1)\ln(14x) + \frac{(6{,}5x^2+x)14}{14x} - 6{,}5x - 1 =$$

$$= (13x+1)\ln(14x) + 6{,}5x + 1 - 6{,}5x - 1 = (13x+1)\ln(14x)\ .$$

Ответ: $\int (13x+1)\ln(14x)dx = (6{,}5x^2 + x)\ln(14x) - 3{,}25x^2 - x + \mathrm{C}$.

в) Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+11}{x^3+12x} = \frac{x+11}{x(x^2+12)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+12},\ \text{отсюда}$$

$$x + 11 \equiv A(x^2+12) + (Bx+C)x\ ,\ \text{или}\quad x + 11 \equiv (A+B)x^2 + Cx + 12A\ .$$

Неопределенные коэффициенты A, B, C найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$\text{при } x^0: \quad 11 = 12A \quad \Rightarrow \quad A = 11/12;$$
$$\text{при } x^1: \quad 1 = C \quad \Rightarrow \quad C = 1;$$
$$\text{при } x^2: \quad 0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = -A = -11/12.$$

Коэффициенты A, B, C можно найти другим способом – подставляя в тождество «удобные» значения x (метод частных значений):

$$x = 0: \quad 11 = 12A,$$
$$x = 1: \quad 12 = A + B + C + 12A,$$
$$x = \text{-}1: \quad 10 = A + B - C + 12A.$$

Из первого уравнения получим: $A = 11/12$. Почленно вычитая два последних равенства, получим: $2C = 2 \Rightarrow C = 1$, и из последнего уравнения

$$B = 10 - A + C - 12A = -A = -11/12.$$

Таким образом, $A = 11/12,\ B = -11/12,\ C = 1.$

Переходим к интегрированию:

$$\int \frac{x+11}{x^3+12x}\,dx = \int\left(\frac{11/12}{x} + \frac{(-11/12)x+1}{x^2+12}\right)dx = \frac{11}{12}\int\frac{dx}{x} - \frac{11}{12}\int\frac{x}{x^2+12}\,dx + \int\frac{dx}{x^2+12} =$$
$$= \frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C.$$

Здесь использовано: $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+12}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+12}\,dx = \int\frac{d(x^2+12)}{x^2+12} = \ln\left|x^2+12\right| + C$,

$$\int\frac{dx}{x^2+12} = \int\frac{dx}{x^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)' = \frac{11}{12x} - \frac{11(2x)}{24(x^2+12)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{11}{12x} - \frac{11x}{12(x^2+12)} + \frac{1}{12+x^2} = \frac{11(x^2+12) - 11x^2 + 12x}{12x(x^2+12)} = \frac{12(11+x)}{12x(x^2+12)} = \frac{x+11}{x^3+12x}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{x+11}{x^3+12x}\,dx = \frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C$.

Решение задачи 7.

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода, поэтому

$$\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+169}=\lim_{b\to+\infty}\int_{13}^{b}\frac{dx}{x^2+169}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{13}arctg\frac{b}{13}-\frac{1}{13}arctg1\right)=\frac{1}{13}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{52}$$

.

следовательно, интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{52}\approx 0{,}06$.

Ответ: интеграл $\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+169}$ сходится и равен $\frac{\pi}{52}\approx 0{,}06$

Решение задачи 8.

а) Найдем точки пересечения кривых, для чего составим и решим систему $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=2x+4 \end{cases}$. Приравнивая правые части, получаем уравнение $x^2-2x-3=0$, решив которое, найдем абсциссы точек пересечения: $x=-1$, $x=3$.

Построим чертеж (рис. 6). На рисунке видно, что $f_2(x)=2x+4>x^2+1=f_1(x)$ на промежутке [–1; 3].

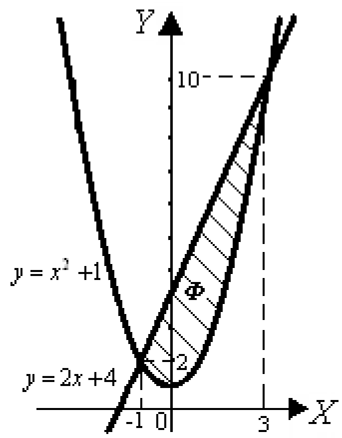

Рис. 6.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$S_Ф=\int_{-1}^{3}(2x+4-x^2-1)dx=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=\left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=$$

$$=(9+9-9)-\left(1-3+\frac{1}{3}\right)=9+\frac{5}{3}=10\frac{2}{3}\approx 10{,}7.$$

Ответ: $S_Ф=10\frac{2}{3}\approx 10{,}7$ единиц площади.

б) Для построения кривой $\rho=12+\cos\varphi$ в ПСК составим таблицу значений функции на промежутке $[0;2\pi]$.

φ_k	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$6\pi/4$	$7\pi/4$	2π
$r(\varphi_k)=12+\cos\varphi_k$	13	12,7	12	11,3	11	11,3	12	12,7	13

Построим чертеж в ПСК (рис. 7). Так как фигура ограничена кривой, заданной в полярной системе координат, то площадь фигуры, ограниченной заданной линией : $S_{\phi} = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Для $\rho = 12 + \cos\varphi$ получаем:

$$S_{\phi} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(12+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(144 + 24\cos\varphi -$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 144\pi + \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 144$$

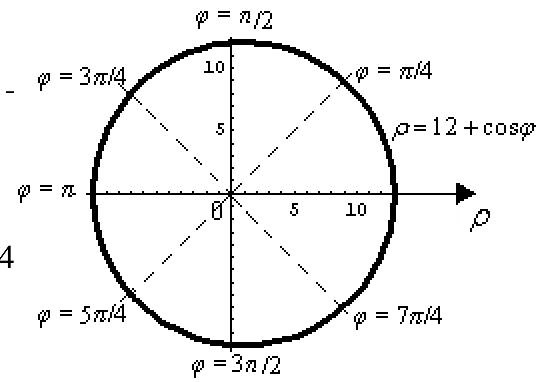

Рис. 7.

Ответ: $S_{\phi} = 144{,}5\pi \approx 454$ единицы площади.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Каждый вариант контрольной работы содержит 8 задач по темам «Элементы линейной алгебры. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной».

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением задач, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта контрольной работы.

Задания для всех вариантов общие; студенту следует выбрать из условия каждой задачи данные, необходимые для ее решения, в соответствии со своим вариантом. Оформление контрольной работы должно соответствовать установленным правилам и требованиям. Необходимые чертежи должны выполняться четко, с соответствующими подписями и комментариями (см. образец выполнения примерного варианта работы).

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A. Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

№ варианта	многочлен $f(x)$	Матрица A
1	$f(x)=-x^2+5x+3$	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$
2	$f(x)=-2x^2+4x+7$	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$
3	$f(x)=3x^2+x+2$	$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$

4	$f(x)=2x-x^2-3$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5	$f(x)=3x+x^2-2$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
6	$f(x)=2(1-x)^2$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
7	$f(x)=(3-x)^2$	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$
8	$f(x)=-3(x^2-x+1)$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9	$f(x)=2x-x^2+1$	$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
10	$f(x)=4(x^2-x)-3$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 2. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Найти решение системы с помощью формул Крамера.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений

1	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=10, \\ 3x_1+5x_3=-11. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_3=10, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=10. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=9, \\ -x_1+x_2+3x_3=2, \\ -x_2+x_3=3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} -x_1+x_3=5, \\ x_1+x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+2x_2+x_3=-3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-2, \\ x_2-2x_3=0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -3x_1+x_2=-5, \\ 2x_1-3x_2+x_3=4, \\ -x_1+4x_2-2x_3=-1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2+x_3=4, \\ x_1+x_3=-1. \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=4, \\ x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+3x_3=-3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-4x_2-2x_3=-1, \\ -2x_1+x_2=3, \\ x_1+x_2+3x_3=-9. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=8, \\ 2x_1+x_3=-1, \\ x_1+2x_2-3x_3=-14. \end{cases}$

Задача 3. Найти производную y'_x:

№ варианта	Функции	
	а)	б)
1	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}5x}{1+\ln 3x}$	$\begin{cases} x=t^2\cdot e^{3t}, \\ y=t\cdot e^{-t} \end{cases}$
2	$y=\dfrac{\cos 5x}{1+3x^2}$	$\begin{cases} x=\sqrt{1+3t^2} \\ y=\ln(1+3t^2) \end{cases}$
3	$y=\dfrac{e^{4x}}{2-\mathrm{x}+3x^2}$	$\begin{cases} x=\arcsin 3t, \\ y=\ln(1-9t^2) \end{cases}$
4	$y=\dfrac{5x^2+4}{\arccos(3x)}$	$\begin{cases} x=t\cdot \mathrm{ctg}2\mathrm{t}, \\ y=2\sqrt{t^5}-3t \end{cases}$

5	$y=\dfrac{\ln(5x+2)}{1+2x+x^2}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos 5t}, \\ y=\mathrm{tg}5t-4 \end{cases}$
6	$y=\dfrac{4^{x+2}}{5\mathrm{x}+3x^2}$	$\begin{cases} x=\ln t\cdot(t+1), \\ y=\dfrac{1}{2}t^2+t \end{cases}$
7	$y=\dfrac{\ln 5x}{\cos 4x}$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{(t+1)^2}, \\ y=\dfrac{t-4}{t+1} \end{cases}$
8	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}5x}{\sqrt{1+3\mathrm{x}}}$	$\begin{cases} x=t\cdot\sin 2t, \\ y=t-\cos t \end{cases}$
9	$y=\dfrac{\mathrm{arcctg}7x}{3x^2-2}$	$\begin{cases} x=2t-\ln^2 t, \\ y=\dfrac{t^2-1}{t} \end{cases}$
10	$y=\dfrac{e^{4x+3}}{\ln(x)+2}$	$\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=2+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Задача 4. Дана функция $y=f(x)$ и значение x_0. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

№ варианта	Функция	Точка
1	$y=\ln\dfrac{2-x}{x^3}$	$x_0=1$
2	$y=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$x_0=4$
3	$y=e^{3x}(x+1)$	$x_0=0$
4	$y=\ln(2x^2-2x-3)$	$x_0=2$
5	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	$x_0=1$
6	$y=x-2\mathrm{arctg}\,x+1$	$x_0=0$

7	$y = \arcsin 3x + 3$	$x_0 = 0$
8	$y = \dfrac{\ln x + 1}{x + 1}$	$x_0 = 1$
9	$y = \sqrt[3]{2 - x^3}$	$x_0 = 1$
10	$y = e^{\sin 2x}$	$x_0 = 0$

Задача 5. Провести полное исследование функции и построить ее график.

№ вари-анта	Функция
1	$y = e^{4x - x^2 - 5}$
2	$y = \ln(x^2 - 2x)$
3	$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
4	$y = (3 - x)e^{x-2}$
5	$y = \dfrac{1}{\ln x}$
6	$y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
7	$y = xe^{-x}$
8	$y = \sqrt{x} \cdot \ln x$
9	$y = \dfrac{e^x}{1 - x}$
10	$y = \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием. Здесь n- номер варианта.

№ варианта	Интегралы
n	$a)\int \frac{x^{n+1}}{x^{n+2}-2n+9}dx$; $\quad б)\int ((n+1)x+1)\ln\big((11-n)x\big)dx$; $\quad в)\int \frac{x+n+1}{x^3+(11-n)x}dx$

Задача 7. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость. Здесь n- номер варианта.

№ варианта	Интеграл
n	$a)\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+(11-n)^2}dx$

Задача 8. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры и выполнить чертежи. Здесь n- номер варианта.

а) ограниченной в ДСК линиями l_1 и l_2;

б) ограниченной в ПСК линией l.

№ варианта	Уравнения линий	
	а)	*б*)
n	$l_1:\ y=2nx^2$; $l_2: y=(n^2-8)x+4n$	$l:\ \rho=11-n-\sin\varphi$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- Москва : Айрис-пресс, 2011. - 602, [1] с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 212.

2. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург : Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003, 2001. - 432 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 781.

Дополнительная литература

1. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Профессия, 2007, 2003 ; Москва. - 200 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 378.

2. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 815 с.: ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 30.